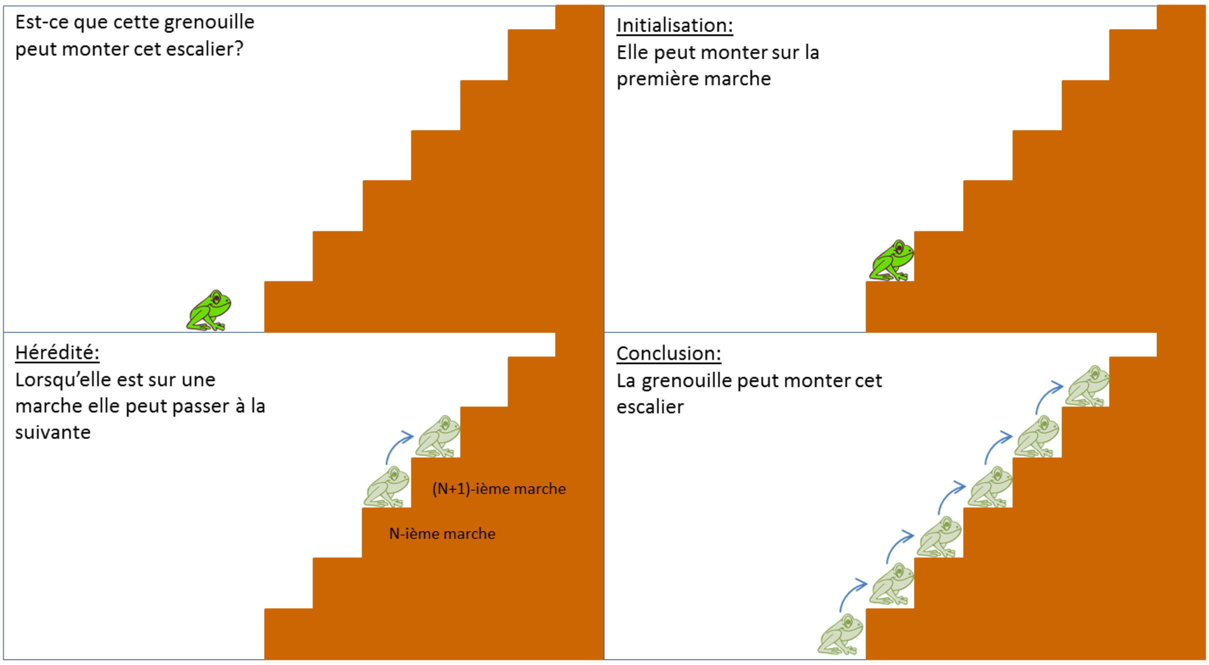
Preuve par récurrence

Question préliminaire : Si je peux monter sur la première marche d'un escalier ET que lorsque je suis sur une marche je peux toujours passer à la suivante, puis-je monter tout l'escalier ?

Un petit dessin pour mieux comprendre :



Un énoncé correct de la récurrence

Initialisation	**SI** il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie	Je peux monter sur la première marche de l'escalier
Hérédité	**ET** pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$	Quand je suis sur une marche je peux passer à la suivante
Conclusion	**ALORS** pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie	Je peux monter l'escalier

Si l'une des conditions n'est pas vérifiée :

- Si on ne valide pas l'initialisation : Je ne peux pas accéder à la première marche, c'est-à-dire que l'escalier n'est pas accessible, je ne peux pas y monter.
- Si on ne valide pas l'hérédité : Au moins une marche n'est pas accessible à partir de la précédente : je ne peux pas monter l'escalier.

Les deux étapes sont indispensables pour pouvoir conclure!

Exemples :

✓ Avec des sommes

1) Montrer que pour tout n>0, $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

2) Montrer que la somme des n premiers impairs est égale au carré de n, c'est-à-dire que pour tout n>0

$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

3) Montrer que pour tous les entiers naturels non nuls, on a :

$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4) Montrer que la somme des cubes des n premiers entiers naturels non nuls est égale au carré de la somme des n premiers entiers naturels non nuls.

✓ La variation d'une suite :

5) Soit (Un) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} U_0=8 \\ U_{n+1}=\frac{1}{4}U_n+3 \end{cases}$$

a° Montrer par récurrence que $U_{n+1}\leq U_n$

b° En déduire le sens de variation de la suite

6) Soit (Un) la suite définie pour tout entier naturel par :

$$\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=\sqrt{2U_n+1} \end{cases}$$

Montrer que la suite (Un) est croissante.

✓ Majorant, minorant et encadrement

7) Montrer que la suite définie par : $\begin{cases} U_0=-1 \\ U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+1 \end{cases}$ est majorée par 2.

8) Soit la suite définie par $U_0=\frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n par $U_{n+1}=1-U_n{}^2$.

Montrer par récurrence que tous les termes de la suite sont élément de l'intervalle $[0;1]$

✓ Avec des suites

9) On considère des suites (Un) et (Vn) définies par :

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{3}{5} U_n + 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = \frac{3}{5} V_n + 2 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel on a : $U_n < V_n$

✓ Bernoulli

10) Démontrer l'inégalité de Bernoulli c'est-à-dire que pour tout α>0 et n un entier naturel on a :

$(1+\propto)^n \geq 1+n\propto$

✓ Exercice

Soit (U_n) définie par $U_0=2$ et $U_{(n+1)}=2U_n-3$

a) Déterminer les 6 premiers termes de la suite (U_n)

b) Déterminer les premiers termes de la suite (V_n) définie par $V_n=U_n-3$

c) Conjecturer l'expression de V_n en fonction de n

d) Démontrer cette conjecture par récurrence

e) Exprimer alors U_n en fonction de n

Correction

Exemple 1 :

Soit P(n) la proposition mathématique « $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ pour tout n entier naturel»

Initialisation :

Si n=1, le terme de gauche vaut 1 et celui de droite aussi, P(1) est donc vérifiée.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel n pour lequel P(n) est vraie, c'est-à-dire que:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Démontrons alors que la proposition est vraie au rang n+1, c'est-à-dire que:

$$1+2+3+...+n+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Raisonnement :

Comme $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ en ajoutant $n+1$ à gauche et à droite de l'égalité, on obtient :

$$1+2+3+...+n+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1$$

$$1+2+3+...+n+n+1=\frac{n^2+n}{2}+\frac{2n+2}{2}$$

$$1+2+3+...+n+n+1=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

En utilisant un calcul de discriminant sur le trinôme n^2+3n+2 , on en déduit une factorisation $(n+1)(n+2)$ et donc :

$$1+2+3+...+n+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

C'est ce que nous souhaitions démontrer. On peut donc en conclure que lorsque la proposition est vraie au rang n elle l'est aussi au rang n+1. C'est-à-dire que $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

Conclusion :

P(1) est vraie et pour tout n≥1, $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ alors P(n) est vraie pour tout n≥1.

Exemple 2 :

Soit P(n) la proposition mathématique «$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$»

Initialisation :

Si n=1, le terme de gauche vaut 1 et celui de droite aussi, P(1) est donc vérifiée.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel n pour lequel P(n) est vraie, c'est-à-dire que:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

Démontrons alors que la proposition est vraie au rang n+1, c'est-à-dire que:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$$

Raisonnement : Comme $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ on peut ajouter $(2n+1)$ de part et d'autre de l'égalité. On obtient alors :

$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)$

En factorisant grâce à la première identité remarquable on trouve bien :

$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$

C'est ce que nous souhaitions démontrer. On peut donc en conclure que lorsque la proposition est vraie au rang n elle l'est aussi au rang n+1. C'est-à-dire que $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

Conclusion :

P(1) est vraie et pour tout n≥1, $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ alors P(n) est vraie pour tout n≥1.

Exemple 3 :

Soit P(n) la proposition mathématique « $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ »

Initialisation :

Si n=1, le terme de gauche vaut 1 et celui de droite aussi, P(1) est donc vérifiée.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel n pour lequel P(n) est vraie, c'est-à-dire que :

$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Démontrons alors que la proposition est vraie au rang n+1, c'est-à-dire que :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Raisonnement : Comme $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, alors on peut ajouter $(n+1)^2$ de part et d'autre de l'égalité et on obtient :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{6(n+1)^2}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

En factorisant par (n+1) on obtient :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

C'est ce que nous souhaitions démontrer. On peut donc en conclure que lorsque la proposition est vraie au rang n elle l'est aussi au rang n+1. C'est-à-dire que
$P(n) \quad P(n+1)$

Conclusion :

P(1) est vraie et pour tout n≥1, $P(n) \quad P(n+1)$ alors P(n) est vraie pour tout n≥1.

Exemple 4 :

Soit P(n) la proposition mathématique « $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ »

Initialisation :

Si n=1, le terme de gauche vaut 1 et celui de droite aussi, P(1) est donc vérifiée.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel n pour lequel P(n) est vraie, c'est-à-dire que:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Démontrons alors que la proposition est vraie au rang n+1, c'est-à-dire que:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Raisonnement :

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)+\frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4)$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

C'est ce que nous souhaitions démontrer. On peut donc en conclure que lorsque la proposition est vraie au rang n elle l'est aussi au rang n+1. C'est-à-dire que $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

Conclusion :

P(1) est vraie et pour tout n≥1, $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ alors P(n) est vraie pour tout n≥1.

Exemple 5 :

Soit P(n) la proposition mathématique « $U_{n+1}\leq U_n$ » pour n un entier naturel

Initialisation :

Si n=0,

$U_0=8$ et $U_1=\frac{1}{4}*8+3=5$ c'est à dire $U_1\leq U_0$

P(0) est donc vérifiée.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel n pour lequel P(n) est vraie, c'est-à-dire que:

$$U_{n+1} \leq U_n$$

Démontrons alors que la proposition est vraie au rang n+1, c'est-à-dire que:

$$U_{n+2} \leq U_{n+1}$$

Raisonnement :

$$U_{n+1} \leq U_n$$

$$\frac{1}{4} U_{n+1} \leq \frac{1}{4} U_n$$

$$\frac{1}{4} U_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{4} U_n + 3$$

$$U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$$

C'est ce que nous souhaitions démontrer. On peut donc en conclure que lorsque la proposition est vraie au rang n elle l'est aussi au rang n+1. C'est-à-dire que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusion :

P(0) est vraie et pour tout n≥0, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ alors P(n) est vraie pour tout n≥0.

Exemple 6 :Soit P(n) la proposition mathématique « $U_{n+1} \geqslant U_n$ » pour n un entier naturel

Initialisation : Si $n=0$, on compare $U_0=2$ et $U_1=\sqrt{5} \geqslant U_0$

P(0) est donc vérifiée.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel n pour lequel P(n) est vraie, c'est-à-dire que:

$$U_{n+1} \geqslant U_n$$

Démontrons alors que la proposition est vraie au rang n+1, c'est-à-dire que:

$$U_{n+2} \geqslant U_{n+1}$$

Raisonnement :

$$U_{n+1} \geqslant U_n$$

$$2U_{n+1} \geqslant 2U_n$$

$$2U_{n+1}+1 \geqslant 2U_n+1$$

Comme la fonction racine est croissante, elle conserve l'ordre et donc:

$$\sqrt{2U_{n+1}+1} \geqslant \sqrt{2U_n+1}$$

$$U_{n+2} \geqslant U_{n+1}$$

C'est ce que nous souhaitions démontrer. On peut donc en conclure que lorsque la proposition est vraie au rang n elle l'est aussi au rang n+1. C'est-à-dire que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusion :

P(0) est vraie et pour tout n≥0, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ alors P(n) est vraie pour tout n≥0.

Exemple 7 : Soit P(n) la proposition mathématique « $U_n \leqslant 2$ » pour n un entier naturel

Initialisation :

Si n=0, $U_0 = -1 \leqslant 2$

P(0) est donc vérifiée.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel n pour lequel P(n) est vraie, c'est-à-dire que:

$$U_n \leqslant 2$$

Démontrons alors que la proposition est vraie au rang n+1, c'est-à-dire que:

$$U_{n+1} \leqslant 2$$

Raisonnement :

$$\frac{1}{2} U_n \leqslant \frac{1}{2} * 2$$

$$\frac{1}{2} U_n + 1 \leqslant 1 + 1$$

$$U_{n+1} \leqslant 2$$

C'est ce que nous souhaitions démontrer. On peut donc en conclure que lorsque la proposition est vraie au rang n elle l'est aussi au rang n+1. C'est-à-dire que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusion :

P(0) est vraie et pour tout n≥0, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ alors P(n) est vraie pour tout n≥0.

Exemple 8 : Soit P(n) la proposition mathématique « $0 \leqslant U_n \leqslant 1$ » pour n un entier naturel

Initialisation :

Si n=0, $U_0 = \frac{1}{2}$

P(0) est donc vérifiée.

__Hérédité__ :

Supposons qu'il existe un entier naturel n pour lequel P(n) est vraie, c'est-à-dire que:

$$0 \leqslant U_n \leqslant 1$$

Démontrons alors que la proposition est vraie au rang n+1, c'est-à-dire que:

$$0 \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$$

Raisonnement :

$$0 \leqslant U_n \leqslant 1$$

$$0 \leqslant U_n^2 \leqslant 1$$

$$0 \geqslant -U_n^2 \geqslant -1$$

$$1 \geqslant 1-U_n^2 \geqslant 1-1$$

$$1 \geqslant U_{n+1} \geqslant 0$$

C'est ce que nous souhaitions démontrer. On peut donc en conclure que lorsque la proposition est vraie au rang n elle l'est aussi au rang n+1. C'est-à-dire que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

__Conclusion :__

P(0) est vraie et pour tout n≥0, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ alors P(n) est vraie pour tout n≥0.

Exemple 9 :Soit P(n) la proposition mathématique « $U_n < V_n$ » pour n un entier naturel

__Initialisation__ :

Si n=0, on a bien $U_0 < V_0$

P(0) est donc vérifiée.

__Hérédité__ :

Supposons qu'il existe un entier naturel n pour lequel P(n) est vraie, c'est-à-dire que:

$$U_n < V_n$$

Démontrons alors que la proposition est vraie au rang n+1, c'est-à-dire que:

$$U_{n+1} < V_{n+1}$$

Raisonnement :

$$U_n < V_n$$

$$\frac{3}{5}U_n < \frac{3}{5}V_n$$

$$\frac{3}{5}U_n + 2 < \frac{3}{5}V_n + 2$$

$$U_{n+1} < V_{n+1}$$

C'est ce que nous souhaitions démontrer. On peut donc en conclure que lorsque la proposition est vraie au rang n elle l'est aussi au rang n+1. C'est-à-dire que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusion :

P(0) est vraie et pour tout n≥0, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ alors P(n) est vraie pour tout n≥0.

Exemple 10 :

Soit P(n) la proposition mathématique « $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$ est vraie lorsque $\alpha > 0$ »

Initialisation :

Si n=0, le terme de gauche vaut et le terme de droite vaut 1 aussi. P(0) est donc vérifiée.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel n pour lequel P(n) est vraie, c'est-à-dire que :

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$$

Démontrons alors que la proposition est vraie au rang n+1, c'est-à-dire que :

$$(1+\alpha)^{(n+1)} \geqslant 1+(n+1)\alpha$$

Raisonnement :

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$$

En multipliant par $1+\alpha$ de part et d'autre (pas de changement de sens de l'inégalité car $\alpha > 0$ donc $1+\alpha > 0$: $(1+\alpha)(1+\alpha)^n \geqslant (1+\alpha)(1+n\alpha)$

Grâce aux propriétés sur les puissances on peut écrire :

$$(1+\alpha)^{(n+1)} \geqslant (1+\alpha)(1+n\alpha)$$

$$(1+\alpha)^{(n+1)} \geqslant 1+\alpha+n\alpha+n\alpha^2$$

$$(1+\alpha)^{(n+1)} \geqslant 1+\alpha(n+1)+n\alpha^2 > 1+\alpha(n+1)$$

Car $n\alpha^2 > 0$

On a donc bien $(1+\alpha)^{(n+1)} > 1+\alpha(n+1)$

C'est ce que nous souhaitions démontrer. On peut donc en conclure que lorsque la proposition est vraie au rang n elle l'est aussi au rang n+1. C'est-à-dire que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusion :

P(0) est vraie et pour tout n≥0, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ alors P(n) est vraie pour tout n≥0.

Exercice :

Indice	U	V
0	2	-1
1	1	-2
2	-1	-4
3	-5	-8
4	-13	-16
5	-29	-32

On peut supposer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $V_0=-1$, ce qui conduit à une expression de la forme $v_n=-1*2^n$

Démontrons le par récurrence.

Soit P(n) la proposition mathématique « $V_n=-1*2^n$ »

Initialisation :

Pour $n=0$ la proposition est vraie car $V_0=-1*2^0=-1$

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel n pour lequel P(n) est vraie, c'est à dire :

$$V_n=-1*2^n$$

Démontrons alors que la proposition est vraie au rang n+1, c'est à dire que :

$$V_{(n+1)}=-1*2^{(n+1)}$$

Raisonnement :

$V_{(n+1)}=U_{(n+1)}-3$

$V_{(n+1)}=2U_n-3-3$

$V_{(n+1)}=2U_n-6$

Or, on peut écrire $U_n=V_n+3=-1*2^n+3$

Donc en remplaçant dans l'expression de $V_{(n+1)}$ il vient : $V_{(n+1)}=2*(-1*2^n+3)-6$

En développant et réduisant on trouve bien $V_{(n+1)}=-1*2^n+1$

C'est ce que nous souhaitions démontrer. On peut donc en conclure que lorsque la proposition est vraie au rang n elle l'est aussi au rang n+1. C'est-à-dire que $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

Conclusion :

P(0) est vraie et pour tout n≥0, $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ alors P(n) est vraie pour tout n≥0.

Finalement, comme $V_n=-1*2^n$ et $U_n=V_n+3$, on en déduit $U_n=-1*2^n+3$